М. М. Кокурин

Марийский государственный университет,

kokurin@nextmail.ru

О ВЫБОРЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Рассматривается задача Коши

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = f, \tag{1}$$

где $A : D(A) \subset X \to X$ — неограниченный замкнутый оператор, действующий в банаховом пространстве X; $\overline{D(A)} = X$, $f \in D(A)$. Разыскивается решение $x = x(t)$ задачи (1) на интервале $[0,T]$. Ниже $\sigma(A)$, $R(\zeta, A) = (\zeta E - A)^{-1}$ — спектр и резольвента оператора A, $K(\varphi) = \{\zeta \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\arg\zeta| < \varphi\}$, $\varphi \in (0, \pi)$. Предполагается, что для оператора A выполнено

Условие 1. *Справедливо включение* $\sigma(A) \subset K(\varphi_0)$, $\varphi_0 \in$ $\in (0, \pi/2)$ *и имеет место оценка*

$$\|R(\zeta, A)\| \leqslant C_0(1 + |\zeta|)^{-1} \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}\backslash K(\varphi_0). \tag{2}$$

Исходная задача (1) в общем случае поставлена некорректно, при любом $f \in D(A)$ она имеет не более одного решения [1]. Предполагается, что классическое решение $x = x(t)$ задачи (1) существует при $t \in [0,T]$. Исследуется класс разностных схем относительно приближенных значений решения $x = x(t)$ в точках $t = n\Delta t$:

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^{k} \beta_j A x_{n+j}, 0 \leqslant n \leqslant N - k, x_0 = f. \tag{3}$$

Здесь $k \in \mathbb{N}$, α_j, $\beta_j \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant j \leqslant k$ — фиксированные параметры, $\Delta t = T/N$. В [1] изучался простейший способ задания начальных условий в (3), согласно которому $x_j = f$, $0 \leqslant j \leqslant k-1$. В данной работе показано, что специальный выбор элементов x_j, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, позволяет улучшить сходимость схемы (3).

Без потери общности можно положить $\alpha_k = 1$. Пусть также $|\arg \beta_k| > \varphi_0$. Тогда в силу условия 1 приближения x_j, $k \leqslant j \leqslant N$, корректно определяются схемой (3).

Лемма 1. *Пусть даны $u_\nu \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant \nu \leqslant m$. Тогда для функции $u(z) = (a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m)(1+z)^{-m}$, где*

$$a_\nu = \sum_{s=0}^{\nu} \frac{m! u_s}{s!(\nu - s)!(m - \nu + s)!}, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant m,$$

справедливо равенство $u^{(\nu)}(0) = u_\nu$, $0 \leqslant \nu \leqslant m$.

Рассмотрим вспомогательное разностное уравнение

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j v_{n+j} = \Delta t \lambda \sum_{j=0}^{k} \beta_j v_{n+j}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N - k. \tag{4}$$

Пусть $m \geqslant 1$ — порядок аппроксимации этим уравнением задачи Коши $v' = \lambda v$, $v(0) = 1$, с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ [2, с. 384]. Если $k > 1$, то положим $u_j(z) = P_j(z)(1+z)^{-m}$, $P_j(z)$ — многочлен степени m, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, так, чтобы выполнялось $u_j^{(\nu)}(0) = j^\nu$, $0 \leqslant \nu \leqslant m$. Существование многочленов P_j обеспечивается леммой 1. Далее, в (4) выберем $v_0(\lambda) \equiv 1$, $v_j(\lambda) = u_j(\lambda \Delta t)$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$. Тогда при $|\lambda|\Delta t = O(1)$ справедливо соотношение $|v_j(\lambda) - \exp(j\lambda\Delta t)| = O(|\lambda|^{m+1}(\Delta t)^{m+1})$, $0 \leqslant j \leqslant k-1$.

Пусть Ω — объединение открытой $\varepsilon(|\beta_k|\Delta t)^{-1}$-окрестности точки $(\beta_k \Delta t)^{-1}$ и открытой $\varepsilon(\Delta t)^{-1}$-окрестности точки $-(\Delta t)^{-1}$ при достаточно малом ε. Тогда Ω не пересекается с $K(\varphi_0)$, уравнение (4) имеет решение $v_n = v_n(\lambda)$, $0 \leqslant n \leqslant N$, где $v_n(\lambda)$ — дробно-рациональная функция. Эти факты используются при доказательстве нижеприведенных теорем.

Пусть (4) удовлетворяет следующему условию [2, с. 390].

Условие 2. *Все корни $\widetilde{\xi} \in \mathbb{C}$ характеристического полинома $\rho(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \cdots + \alpha_k\xi^k$ таковы, что $|\widetilde{\xi}| \leqslant 1$, а те корни, для которых $|\widetilde{\xi}| = 1$, являются простыми.*

Вместо стандартного выбора $x_j = f$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$ (см. [1]), положим в (3) $x_j = v_j(A)f$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$. Тогда $x_n = v_n(A)f$, $0 \leqslant n \leqslant N$. Предполагаем, что при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\Omega$, $\mathrm{Re}\lambda > 0$

$$|v_n(\lambda)| \leqslant C_1 \exp(an\Delta t\mathrm{Re}\lambda), \; 0 \leqslant n \leqslant N, \; a = a(\arg\lambda). \qquad (5)$$

Лемма 2. *Для любой разностной схемы* (4) *существует* $a \geqslant 1$, *такое, что для* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\Omega$, $\mathrm{Re}\lambda > 0$ *выполняется* (5).

В ряде случаев удаётся установить справедливость (5) с $a = 1$; тогда оценка $\|x_n - x(n\Delta t)\|$ даётся теоремой 1; в противном случае — теоремой 2.

Теорема 1. *Пусть выполняется* (5) *с* $a = 1$ *и существуют такие* $w \in X$, $p > 0$, *что* $x(T) = A^{-p}w$. *Тогда для погрешности схемы* (3) *справедлива равномерная по* $t = n\Delta t$ *оценка*

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leqslant C_2\|w\| \ln^{-p}(1/\Delta t), \quad 0 \leqslant n \leqslant N$$

с константой C_2, не зависящей от Δt.

Теорема 2. *Пусть выполняется* (5) *с* $a > 1$ *и решение задачи* (1) *существует на отрезке* $[0, T_1]$, *где* $T_1 > aT$. *Тогда справедлива равномерная по* $t = n\Delta t$ *оценка*

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leqslant C_3\left(\ln^{m+1}\frac{1}{\Delta t}\right)(\Delta t)^{\frac{(T_1-aT)m}{T_1-aT+(\mu+1)T}},\ 0 \leqslant n \leqslant N,$$

где $\mu = \mu(\varphi_0)$, *а константа* C_3 *не зависит от* Δt.

Пусть вместо f в (1) известно приближение $f_\delta \in X$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$, $\delta > 0$. Тогда $x_n = v_n(A)f_\delta$. Для практического нахождения x_j, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, запишем

$$x_j = P_j(\Delta tA)(E + \Delta tA)^{-m}f_\delta = Q_j((E + \Delta A)^{-1})f_\delta,$$

Q_j — многочлен степени m. Последнее выражение получается последовательным применением формулы

$$A(E + \Delta tA)^{-1} = (\Delta t)^{-1}E - (\Delta t)^{-1}(E + \Delta tA)^{-1}.$$

Аналогично приводится к устойчивому виду следующая из (3) формула

$$x_n = \sum_{j=0}^{k-1}(\beta_j\Delta tA - \alpha_jE)(E - \beta_k\Delta tA)^{-1}x_{n-k+j},\ k \leqslant n \leqslant N.$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда при согласовании* $N(\delta) = [(\kappa b)^{-1}\ln(pm\|w\|/(bT\delta))]$ *с подходящей константой* b *и произвольным* $\kappa > 1$ *для достаточно малых* $\delta > 0$ *справедлива оценка*

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leqslant C_4\|w\|\ln^{-p}\ln(1/\delta).$$

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда при согласовании* $N(\delta) = [(\kappa b)^{-1}\ln(qm/(bT\delta))]$ *с подходящими константами* q *и* b *и произвольным* $\kappa > 1$ *для достаточно малых* $\delta > 0$ *справедливо неравенство*

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leqslant C_5 \ln^{-qm}(1/\delta).$$

Константы C_4, C_5 в теоремах 3, 4 не зависят от δ.

Оценки из теорем 1 – 4 выгодно отличаются от приведённых в [1] тем, что не содержат верхних ограничений на величину T. В отличие от [1], оценки из теорем 1 и 3 равномерны по $0 \leqslant n \leqslant N$, а в оценках из теорем 2 и 4 показатель растёт пропорционально m.

Укажем классы схем (3), удовлетворяющих приведённым выше условиям: группа схем с $k = 2$, $m = 2$: $\alpha_0 = -2\beta_1 - 4\beta_2 + 3$, $\alpha_1 = 2\beta_1 + 4\beta_2 - 4$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_0 = \beta_1 + 3\beta_2 - 2$, $|2\beta_1 + 4\beta_2 - 3| \leqslant 1$, $\beta_1 + 2\beta_2 \neq 1$, $|\arg\beta_2| > \varphi_0$. При $\varphi_0 < \operatorname{arctg}(1/(2\sqrt{6}))$ имеются схемы с $k = 2$, $m = 3$: $\alpha_0 = 12\beta_2 - 5$, $\alpha_1 = -12\beta_2 + 4$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_0 = -5\beta_2 + 2$, $\beta_1 = -8\beta_2 + 4$, $|\beta_2 - 5/12| \leqslant 1/12$, $\beta_2 \neq 1/2$, $|\arg\beta_2| > \varphi_0$. Включение в рассмотрение схем с $k = 2$, $m = 3$ оказывается возможным за счёт привлечения по сравнению с [1] комплексных α_j, β_j, $0 \leqslant j \leqslant k$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09–01–00273а) и АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (темплан МарГУ, № 1.2.09).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакушинский А. Б., Кокурин М. Ю., Ключев В. В. *Об оценке скорости сходимости и погрешности разностных методов аппроксимации решения некорректной задачи Коши в банаховом пространстве* // Вычислительные методы и программирование. – 2006. – Т. 7. – С. 163-171.

2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. *Численные методы*. – М.: БИНОМ, 2007. – 636 с.

Н. В. Кондратьева

Чувашский государственный педагогический университет,

kondrateva-nv@inbox.ru

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА АБСОЛЮТЕ ПРОЕКТИВНО-МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

В настоящей работе изучается геометрия сопряженной сети Σ_{n-1}, заданной на невырожденном абсолюте Q^2_{n-1} проективно-метрического пространства K_n.

Известно [2], что n-мерным пространством K_n с проективной метрикой называется проективное пространство P_n, в котором задана неподвижная гиперквадрика Q^2_{n-1} (абсолют); уравнение Q^2_{n-1} в проективном репере R записывается в виде

$$g_{IK}x^I x^K = 0,\ g_{[IK]} = 0. \tag{1}$$

Отнесем абсолют Q^2_{n-1} к реперу первого порядка, то есть его вершина $A_0 \in Q^2_{n-1}$, а точки A_i лежат в касательной гиперплоскости $T_{n-1}(A_0)$ к абсолюту в точке A_0.

За счет нормировки коэффициентов абсолюта Q^2_{n-1} (1) его уравнение в репере первого порядка можно записать в виде

$$g_{ij}x^i x^j + g_{nn}(x_n)^2 + 2g_{in}x^i x^n = 2x^0 x^n. \tag{2}$$